P 1975

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

DURÉE : 4 heures

N. B. — *La question* 3 *peut être traitée indépendamment des autres questions.*

1. E est le **R**-espace vectoriel des applications de **R** dans **R**, continues sur **R**, périodiques, de période 2π.

1.1. E′ désignant l'ensemble des applications paires de E, E″ l'ensemble des applications impaires de E, démontrer que E′ et E″ sont deux sous-espaces supplémentaires de E.

1.2. Démontrer que les trois applications f_1, f_2, f_3, définies par :

$$f_1(t) = \cos t\,,\quad f_2(t) = \cos 2t\,,\quad f_3(t) = \cos 3t\,,$$

sont linéairement indépendantes dans E.

1.3. Soient g_1, g_2, g_3 les applications définies par :

$$g_1(t) = \sin t\,,\quad g_2(t) = \sin 2t\,,\quad g_3(t) = \sin 3t\,.$$

On désigne par F le sous-espace vectoriel de E engendré par

$$B = (f_1, g_1, f_2, g_2, f_3, g_3)\,.$$

Démontrer que B est base de F.

1.4. D est l'application qui à tout élément $f \in F$, associe sa fonction dérivée f' : $D(f) = f'$. Montrer que D est un endomorphisme de F, et déterminer sa matrice dans la base B.

1.5. Id est l'application identique de F; on pose :

$$P(\lambda) = \det(D - \lambda\,\mathrm{Id})\quad,\quad Q(\lambda) = \det(D^2 - \lambda\,\mathrm{Id})$$

Démontrer que :

$$[P(\lambda)]^2 = Q(\lambda^2)$$

2. On conserve les notations de la question 1.

2.1. Établir que pour tout élément $f \in E$, l'intégrale

$$\int_\alpha^{\alpha+2\pi} f(t)\,dt$$

est indépendante de $\alpha \in \mathbf{R}$.

2.2. Démontrer que l'application :

$$(\forall f \in E)\qquad f \longmapsto \|f\| = \left[\int_0^{2\pi} (f(t))^2\,dt\right]^{\frac{1}{2}}$$

est une norme.

2.3. On munit alors F, sous-espace vectoriel de E, de la norme induite; tout élément $f \in F$, peut se mettre sous la forme :

$$f(t) = \sum_{k=1}^{3} (a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

2.3.1. Démontrer que : $\| f \|^2 = \pi \sum_1^3 (a_k^2 + b_k^2)$

2.3.2. Calculer en fonction des nombres a_k et b_k : $\| D(f) \|$

En déduire que : $\| D(f) \| \geqslant \| f \|$

Dans quel cas a-t-on l'égalité?

2.3.3. L'application D, définie sur F considéré comme espace vectoriel normé, est-elle continue?

2.4. A l'élément g de E, on associe les coefficients α_k et β_k définis pour $k \in (1, 2, 3)$ par :

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\cos kt\,dt \qquad \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(t)\sin kt\,dt$$

On pose :

$$\hat{g}(t) = \sum_{k=1}^{3} (\alpha_k \cos kt + \beta_k \sin kt)$$

E. N. S. I. P.

2.4.1. Démontrer que pour tout élément $f \in F$, noté comme au 2.3 :

$$f(t) = \sum_{k=1}^{3} (a_k \cos kt + b_k \sin kt),$$

on a :

$$\| g-f \|^2 = \| g \|^2 - \| \hat{g} \|^2 + \pi \sum_{k=1}^{3} \left[(\alpha_k - a_k)^2 + (\beta_k - b_k)^2 \right]$$

2.4.2. En déduire que :

$$(\forall f \in F) \qquad \| g - \hat{g} \| \leqslant \| g - f \|$$

3. P est un plan affine euclidien orienté, rapporté à un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On désigne par $\Gamma(a, b, c)$ la courbe de ce plan admettant pour représentation paramétrique :

$$x(t) = a \cos t + b \cos 2t + c \cos 3t$$
$$y(t) = a \sin t + b \sin 2t + c \sin 3t \qquad (a, b, c \text{ réels}).$$

Il pourra être commode d'introduire les vecteurs unitaires $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tels que :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{M(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} = a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w}$$

3.1. Construire avec soin les deux courbes $\Gamma(a, \frac{a}{2}, 0)$ et $\Gamma\left(a, a, \frac{a}{3}\right)$.

3.2. A chaque courbe $\Gamma(a, b, c)$ on associe l'intégrale :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \left(x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} \right) dt$$

Calculer $\mathcal{A}$ en fonction de a, b, c.

3.3. A chaque courbe $\Gamma(a, b, c)$ on associe de même l'intégrale :

$$L = \int_0^{2\pi} \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\| dt \quad , \quad \left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\|$$

désignant la norme euclidienne.

Une courbe $\Gamma(a, b, c)$ sera dite « sans point stationnaire » si le vecteur $\frac{d\vec{M}}{dt}$ est toujours distinct du vecteur nul.

3.3.1. Montrer que $\left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\|^2$ peut se mettre sous la forme :

$$\left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\|^2 = A + B \cos t + C \cos^2 t \qquad A, B, C, \text{ fonctions de } a, b, c \text{ à expliciter.}$$

3.3.2. Sous quelles conditions nécessaires et suffisantes portant sur a, b, c, existe-t-il deux réels α et β ($\beta \neq 0$) tels que :

$$\left\| \frac{d\vec{M}}{dt} \right\|^2 = (\alpha + \beta \cos t)^2$$

3.3.3. Dans le cas $a = 3c$, $b \neq 0$, former une condition nécessaire et suffisante pour que $\Gamma(a, b, c)$ soit sans point stationnaire.

Calculer dans ce cas L et vérifier que :

$$L^2 \geqslant 4\pi \mathcal{A}$$

3.3.4. Reprendre l'étude proposée au 3.3.3 dans le cas :

$$b^2 = 3ac, \quad a \neq 0.$$

3.3.5. Peut-on trouver une courbe $\Gamma(a, o, c)$ vérifiant à la fois la condition de 3.3.3 et celle de 3.3.4 ?

3.4. On revient aux courbes construites au 3.1.

3.4.1. L'inégalité $L^2 \geqslant 4\pi \mathcal{A}$ est-elle vérifiée?

3.4.2. Préciser, à l'aide des figures obtenues au 3.1, une interprétation géométrique de l'intégrale $\mathcal{A}$.

3.4.3. Déterminer le centre de courbure de $\Gamma\left(a, a, \frac{a}{3}\right)$ au point de paramètre $t = 0$.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail